Chapter-6 Application of Derivatives अवकलज के अनुप्रयोग

MCQ:- (बहुविकल्पीय प्रश्न) -

Q 1 $f(x) = \sin x$ **is increasing in**

$f(x) = \sin x$ किस अन्तराल में वर्धमान है –

(a) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (b) $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

(c) $(0, \pi)$ (d) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Q 2 **The function** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ **is decreasing for**

फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ के ह्रासमान के लिए

(a) $|x| < 3$ (b) $|x| > 3$

(c) $-3 < x < 3$ (d) **None of these/ इनमें से कोई नहीं।**

Q 3 **The least value of k for which** $f(x) = x^2 + kx + 1$ **is increasing on** $(1,2)$ **is-**

k के किस मान के लिए $f(x) = x^2 + kx + 1$, अन्तराल $(1,2)$ पर वर्धमान है ?

(a) -2 (b) -1

(c) 1 (d) 2

Q 4 **The least value of** $f(x) = e^x + e^{-x}$ **is**

$f(x) = e^x + e^{-x}$ का न्यूनत्तम मान है-

(a) -2 (b) 0

(c) 2 (d) **None of these/ इनमें से कोई नहीं**

Q 5 **The maximum value of** $f(x) = (x-2)(x-3)^2$ **is-**

$f(x) = (x-2)(x-3)^2$ का महत्तम मान है-

(a) $\frac{7}{3}$ (b) 3

(c) $\frac{4}{27}$ (d) 0

Q 6 **Tangent is parallel to x - axis then slope-**

स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है तो प्रवणता-

(a) -1 (b) 0

(c) ∞ (d) **None /कोई नहीं**

Q 7 **Slope of tangent at** $x = 2$ **, where curve** $y = x^2 - 2x$

वक्र $y = x^2 - 2x$ में $x = 2$ पर स्पर्श रेखा का ढाल =

(a) 2 (b) 4

(c) -2 (d) 0

Q 8 **Slope of line** $4x - 2y + 8 = 0$ **is-**

रेखा $4x - 2y + 8 = 0$ का ढाल है-

(a) 4 (b) -2

(c) 8 (d) 2

Q 9 **If curve** $y = x^2$ **then slope of normal at** $x = 1$ **is-**

यदि वक्र $y = x^2$ है तो $x = 1$ पर अभिलम्ब का प्रवणता है–

(a) 2 (b) -2

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

Q 10 **The slope at the point** $(1, \sqrt{3})$ **of the curve** $x^2 + y^2 = 4$ **is-**

वक्र $x^2 + y^2 = 4$ के बिन्दू $(1, \sqrt{3})$ पर ढाल है –

(a) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\sqrt{3}$ (d) 3

Q 11 **If** m_1 **and** m_2 **are slope of tangents at any point on the curve.The tangents are perpendicular if**

यदि m_1 और m_2 वक्र के किसी बिंदु पर दो स्पर्श रेखाओं की ढाल हैं–

स्पर्श रेखाएँ परस्पर लम्बवत है यदि –

(a) $m_1 = m_2$ (b) $m_1 \times m_2 = -1$

(c) $\frac{m_1}{m_2} = 2$ (d) **None /कोई नहीं।**

© JCERT not to be republished

Q 12 Tangent and normal is

स्पर्श रेखा और अभिलम्ब है -

(a) **Parallel to each other at point on the curve** /वक्र के बिन्दु पर समान्तर

(b) **Perpendicular each other at point on the curve** / वक्र के बिन्दु पर लम्बवत

(c) **Does not intersect each other/**एक दूसरे को प्रतिछेद नहीं करते

(d) None of these / इनमें से कोई नहीं।

Q 13 The rate of change of the area of a circle with respect to its radius r , when $r = 6cm$.

वृत के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर त्रिज्या r के सापेक्ष क्या होगी , यदि $r = 6cm$.

(a) $12\ cm^2/cm$ (b) $\pi\ cm^2/cm$

(c) $12\pi\ cm^2/cm$ (d) $6\pi\ cm^2/cm$

Q 14 The normal at the point $(1,1)$ on the curve $2y + x^2 = 3$ is

वक्र $2y + x^2 = 3$ के बिन्दू $(1,1)$ पर अभिलम्ब है-

(a) $x + y = 0$ (b) $x - y = 0$

(c) $x + y + 1 = 0$ (d) $x - y + 1 = 0$

Q 15 The equation of normal to the curve $x^2 = 4y$ passing through $(1,2)$ is

वक्र $x^2 = 4y$ के बिन्दु $(1,2)$ से गुजरने वाले अभिलम्ब का समीकरण–

(a) $x + y = 3$ (b) $x - y = 3$

(c) $x + y = 1$ (d) $x - y = 1$

Q 16 The line $y = x + 1$ is a tangent to the curve $y^2 = 4x$ at the point

रेखा $y = x + 1$ वक्र $y^2 = 4x$ के किस बिन्दू पर स्पर्श करती है |

(a) $(1,2)$ (b) $(2,1)$

(c) $(1,-2)$ (d) $(-1,2)$

Q 17 The approximate value of $\sqrt{37}$ is

$\sqrt{37}$ का सन्निकट मान है-

(a) **6.08** (b) **7.08**

(c) **5.6** (d) **9.2**

Q 18 Equation of the tangent to the curve $y = x^2$ at $x = 1$ is

वक्र $y = x^2$ के x=1 पर स्पर्श रेखा का समीकरण है–

(a) $2x + y - 1 = 0$ (b) $2x - y - 1 = 0$

(c) $2x - y + 1 = 0$ (d) **None of these /** इनमें से कोई नहीं।

Q 19 If $f'(x) > 0$ for all $x \in]a,b[$ then $f(x)$ is -

यदि $f'(x) > 0$ सभी $x \in]a,b[$ तो $f(x)$ होगा

(a) **increasing** / वर्धमान

(b) **decreasing** / ह्रासमान

(c) **both increasing and decreasing** / वर्धमान और ह्रासमान दोनों

(d) **None of these** / इनमें से कोई नहीं

Q 20 The approximate value of $\sqrt{26}$ is

$\sqrt{26}$ का सन्निकट मान है -

(a) **6** (b) **5.1**

(c) **5.8** (d) **5.9**

Very Short Questions (2 Marks)

Q 1 In the curve $y^2 = 4x$ obtain the slope of the curve at the point where $y = 2$

वक्र $y^2 = 4x$ में वक्र के उस बिन्दू का प्रवणता निकाले जहाँ $y = 2$

Q 2 Find the point on the curve $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ where the tangents are parallel to the x - axis

वक्र $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ पर उन बिन्दूओं को मालूम करें जिन पर की स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समान्तर हों|

Q 3 Find the rate of change of the area of a circle with respect to its radius r when $r = 3cm$

त्रिज्या r के सापेक्ष वृत के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात करें जब $r = 3cm$

Q 4 Examine whether the function $f(x) = x^2 - 4x + 3$ is increasing or decreasing at $x = 1$?

बताएँ कि फलन $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x = 1$ पर वर्धमान है या ह्रासमान है ?

Q 5 Find the approximate change in the volume v of a cube of side x caused by increasing the side by 1 %

© JCERT not to be republished

यदि घन की भुजा x ,1% वृद्धि होती है तो आयतन v के सन्निकट परिवर्तन ज्ञात करें ?

Q 6 Find the maximum value of $f(x) = x^2 - 4x + 2$

फलन $f(x) = x^2 - 4x + 2$ के उच्चिष्ठ

मान ज्ञात करें ?

Q 7 Show that the function given by $f(x) = 3x + 17$ is strictly increasing on R

सिद्ध कीजिए R पर $f(x) = 3x + 17$ से प्रदत फलन निरंतर वर्धमान है |

Q 8 Find the slope of the normal to the curve $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ at $\theta = \frac{\pi}{4}$?

वक्र $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ के $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलम्ब की प्रवणता ज्ञात कीजिए ?

Short Questions (3 Marks)

Q 1 The radius of a circle is increasing at the rate of 0.7cm/s . What is the rate of increase of its circumference ?

एक वृत की त्रिज्या 0.7cm/s की दर से बढ़ रही है|इसकी परिधि की वृद्धि की दर क्या है?

Q 2 A balloon which remains spherical has a variable radius. Find the rate at which its volume is increasing with the radius when the radius is 10 cm

एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या परिवर्तनशील है | त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 cm है |

Q 3 Find the intervals in which the function f given by $f(x) = 2x^2 - 3x$ is

अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^2 - 3x$ से प्रदत्त फलन f -

(a) strictly increasing / निरंतर वर्धमान

(b) strictly decreasing / निरंतर ह्रासमान

Q 4 Prove that the logarithmic function is strictly increasing on $(0, \infty)$

सिद्ध कीजिए कि लघुगणकीय फलन $(0, \infty)$ में

निरंतर वर्धमान फलन है |

Q 5 Find the equation of all lines having slope -1 that are tangent to the curve $y = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$

प्रवणता -1 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$ को स्पर्श करती है |

Q 6 Find the equation of the normal at the point (am^2, am^3) for the curve $ay^2 = x^3$?

वक्र $ay^2 = x^3$ के बिन्दु (am^2, am^3) पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए ?

Q 7 Find the maximum and minimum values of $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$?

फलन $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$ का महत्तम और निम्नत्तम मान ज्ञात करें ?

Q 8 Find the maximum profit that a company can make if the profit function is given by $p(x) = 41 - 72x - 18x^2$?

यदि लाभ फलन $p(x) = 41 - 72x - 18x^2$ से प्रदत है तो किसी कंपनी द्वारा अर्जित उच्चत्तम लाभ ज्ञात कीजिए ?

Long Questions (5 Marks)

Q 1 Find two numbers whose sum is 24 and whose product is large as possible ?

ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 24 है और जिनका गुणनफल उच्चत्तम हों ?

Q 2 Show that all the rectangles inscribed in a given fixed circle , the square has the maximum area.

सिद्व कीजिए कि एक दिए गए वृत के अंतर्गत सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चत्तम होता है|

Q 3 Find the maximum and minimum values of $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$ in $[0, 3]$.?

अंतराल $[0, 3]$ पर $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$ के उच्चत्तम मान और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए ?

Q 4 Prove that $y = \frac{4\sin\theta}{2 + \cos\theta} - \theta$, is increasing in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

सिद्व कीजिए कि $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में, $y = \frac{4\sin\theta}{2 + \cos\theta} - \theta$ एक वर्धमान फलन है |

Q 5 Find points on the curve $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ at which the tangents are

(a) parallel to x-axis (b) parallel to y-axis

वक्र $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ

(a) x-अक्ष के समांतर है

(b) y-अक्ष के समांतर है

Q 6 Show that the closed right circular cylinder of given surface and maximum volume is such that its height is equal to the diameter of the base.

© JCERT not to be republished

सिद्व कीजिए कि प्रदत पृष्ठ एंव महत्तम आयतन के बेलन की ऊँच्चाई , आधार के व्यास के बराबर होती है|

Q 7 Find the absolute maximum value and the absolute minimum value of

$f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0, \pi]$?

अंतराल $x \in [0, \pi]$ में फलन $f(x) = \sin x + \cos x$ के निरपेक्ष महत्तम और निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात करें ?

Answer : "Application of Derivatives Solution"

Solution of MCQ
91 - Marks)

1 - (d) 2 - (a) 3 - (a) 4 - (c) 5 - (c) 6 - (b) 7 - (a)
8 - (d) 9 - (d) 10 - (a) 11 - (b) 12 - (b) 13 - (c)
14 - (b) 15 - (a) 16 - (a) 17 - (a) 18 - (b) 19 - (b)
20 - (b)

Solutions of very short questions
(2- Marks)

1 Ans : - Given $y^2 = 4x$ .....(1)

d.w.r.to x

$$2y\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \quad .....(2)$$

at $y = 2$

$$\text{slope} = \frac{dy}{dx}\Big]_{y=2} = \frac{2}{2} = 1$$

2 Ans:- Given curve

$$y = x^3 - 2x^2 + x - 2 \quad .....(1)$$

d.w.r.to x

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 1 \quad .....(2)$$

tangents are parallel to x - axis

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (3x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, \frac{1}{3}$$

From equation (1)

when $x = 1 \Rightarrow$

$$y = 1^3 - 2.1^2 + 1 - 2$$

$$y = 1 - 2 + 1 - 2 = -2$$

$$\therefore \text{Point} = (1, -2)$$

when $x = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 2$$

$$y = -\frac{50}{27}$$

$$\therefore \text{Point} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{50}{27}\right)$$

3 Ans : -

Let

A = Area of circle (वृत का क्षेत्रफल)

r = radius of circle (वृत की त्रिज्या)

we know

$$A = \pi r^2$$

d.w.r. to r

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

at r = 3cm

$$\frac{dA}{dr}\Big]_{r=3cm} = 2\pi(3)$$

$$= 6\pi \text{ cm}^2/\text{cm}$$

4 Ans : -

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad .....(1)$$

d.w.r. to x

$$f'(x) = 2x - 4 \quad .....(2)$$

For increasing or decreasing at x = 1

x=1 पर वर्धमान या ह्रासमान के लिए

$$f'(1) = 2.(1) - 4$$

$$= 2 - 4$$

$$= -2 < 0$$

So , f(x) is decreasing at x = 1

x=1 पर f(x) ह्रासमान है।

5 Ans : - Let, v = volume of cube of side x

(भुजा x वाले घन का आयतन)

$$\therefore v = x^3$$

d.w.r. to x

$$\frac{dv}{dx} = 3x^2$$

Now change in volume

(अब आयतन में परिर्वतन)

$$\Delta v = \frac{dv}{dx} \cdot \Delta x$$

$$= 3x^2 \times \Delta x$$

$$= 3x^2 \times (1\% \text{ of } x)$$

$$= 3x^2 \times \frac{1}{100} \times x$$

$$= 0 \cdot 03x^3$$

© JCERT not to be republished

6 Ans : -

$f(x) = x^2 - 4x + 2$ .....(1)

d.w.r. to x

$f'(x) = 2x - 4$

$f''(x) = 2$ .....(2)

for critical point,

$f'(x) = 0$

$\Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4$

$\therefore x = 2$

Now from equation(2) $\Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow f''(2) = 2 = +ve$ Maximum

$\therefore$ equation(1) $\Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow f(2) = 2^2 - 4(2) + 2$

$= 4 - 8 + 2$

$= -2$

7 Ans : -

Given $f(x) = 3x + 17$

Let $x_1, x_2 \in R$

$x_1 < x_2$

$\Rightarrow 3x_1 < 3x_2$

$\Rightarrow 3x_1 + 17 < 3x_2 + 17$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Hence , f(x) is strictly increasing on R

अतः R पर f(x) निरंतर वर्धमान है।

8 Ans : -

Given $x = a\cos^3\theta$

d.w.r.to θ

$\frac{dx}{d\theta} = 3a\cos^2\theta(-\sin\theta)$

And $y = a\sin^3\theta$

d.w.r.to θ

$\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta(\cos\theta)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta(\cos\theta)}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}$$

$= -\tan\theta$

at $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$slope\ of\ normal = \frac{-1}{\left.\frac{dy}{dx}\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}}$$

अभिलंब की प्रवणता

$$= \frac{-1}{-\tan\frac{\pi}{4}}$$

$= 1$

Solutions of short questions (3- Marks)

1 Ans : -

Let r = radius of circle (वृत क त्रिज्या)

c = circumference of circle (वृत की परिधि)

we know

$c = 2\pi r$

d.w.r. to t

$\frac{dc}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt}$ .....(1)

given (दिया है)

rate of increase of radius $= \frac{dr}{dt} = 0 \cdot 7 cm/s$

$\therefore$ equation(1) $\Rightarrow \frac{dc}{dt} = 2\pi(0 \cdot 7)$

$= 1 \cdot 4\pi$ cm/s

2 Ans : -

Let r = radius of balloon (गुब्बारे की त्रिज्या)

v = volume of balloon (गुब्बारे की आयतन)

we know

$v = \frac{4}{3}\pi r^3$

d.w.r. to r

$\frac{dv}{dr} = 4\pi r^2$

at r = 10cm $\Rightarrow$

$\left.\frac{dv}{dr}\right]_{r=10cm} = 4\pi(10)^2$

$= 400\pi$ cm^3/cm

3 Ans : -

Given $f(x) = 2x^2 - 3x$

d.w.r. to x

$f'(x) = 4x - 3$

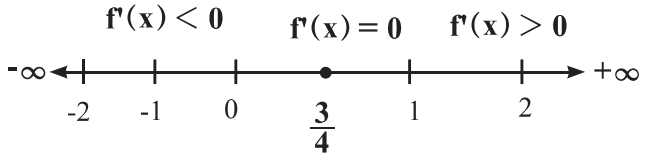
for critical points –

$f'(x) = 0$

$\Rightarrow 4x - 3 = 0 \quad \Rightarrow 4x = 3$

$\Rightarrow x = \frac{3}{4}$

© JCERT not to be republished



Clearly f(x) is strictly increasing on $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$

$\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ अन्तराल पर f(x) निरंतर वर्धमान है।

and **f(x) is strictly decreasing on $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$**

, $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ अन्तराल पर f(x) निरंतर ह्रासमान है।

4 Ans : -

Let $f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

when $x \in (0, \infty)$, $f'(x) > 0$

$\therefore$ f(x) is strictly increasing in $(0, \infty)$

$(0, \infty)$ पर f(x) निरंतर वर्धमान है।

5 Ans : -

Given curve $y = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$ .....(1)

d.w.r. to x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{-1}{(x-1)^2} \quad \left\{\because \frac{dy}{dx} = \text{slope} = -1\right\}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 2$$

When $x = 0 \Rightarrow$

from equation (1) $\Rightarrow$

$$y = \frac{1}{0-1}$$

$$y = -1$$

point $= (x, y)$

$$= (0, -1)$$

equation of tangent at $(0, -1)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = -1(x - 0)$$

$$x + y + 1 = 0$$

When $x = 2 \Rightarrow$

from equation (1) $\Rightarrow$

$$y = \frac{1}{2-1}$$

$$y = 1$$

point $= (x, y)$

$$= (2, 1)$$

equation of tangent at $(2, 1)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -1(x - 2)$$

$$y - 1 = -x + 2$$

$$x + y - 3 = 0$$

6 Ans.

Given curve (दिया गया वक्र)

$$ay^2 = x^3 \text{ .....(1)}$$

d.w.r. to x

$$2ay\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2ay}$$

at (am^2, am^3)

slope of tangent $= \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(am^2, am^3)}$

(स्पर्श रेखा का ढाल)

$$= \frac{3(am^2)^2}{2a(am^3)}$$

$$= \frac{3m}{2}$$

Equation of normal at (am^2, am^3)

(am^2, am^3) पर अभिलंब का समीकरण

$$y - am^3 = \frac{-1}{\frac{3m}{2}}(x - am^2)$$

$$\Rightarrow y - am^3 = \frac{-2}{3m}(x - am^2)$$

$$\Rightarrow 3my - 3am^4 = -2x + 2am^2$$

$$\Rightarrow 2x + 3my - 3am^4 - 2am^2 = 0$$

7 Ans : -

Given function (दिया गया फलन)

$$f(x) = 9x^2 + 12x + 2 \text{ .....(1)}$$

$$= 9x^2 + 6x + 6x + 4 - 2$$

$$= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + (2)^2 - 2$$

$$f(x) = (3x + 2)^2 - 2 \text{ .....(2)}$$

clearly,

$$(3x + 2)^2 \geq 0$$

© JCERT not to be republished

$(3x+2)^2 - 2 \geq -2$

For minimum (न्यूनत्तम के लिए)

$3x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$\therefore$ **minimum value of f** (f का न्यूनतम मान)

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(3 \times -\frac{2}{3} + 2\right)^2 - 2$$
$$= (-2+2)^2 - 2$$
$$= 0^2 - 2$$
$$= -2$$

$\therefore f(x) \geq -2 \ \forall \ x$

$\therefore f(x)$ **has no maximum value.**

f(x) का महत्तम मान नहीं है।

8 Ans : -

Given

$$p(x) = 41 - 72x - 18x^2 \quad .....(1)$$
$$\frac{dp}{dx} = -72 - 36x \quad .....(2)$$
$$\frac{d^2p}{dx^2} = -36 \quad .....(3)$$

For critical point –

$$\frac{dp}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow -72 - 36x = 0$$
$$\Rightarrow 36x = -72$$
$$\Rightarrow x = -2$$

$$\text{equation}(3) \Rightarrow \left.\frac{d^2p}{dx^2}\right]_{x=-2} = -36 = -\text{ve}$$

Maximum value at x = - 2

x= -2 पर महत्तम मान है।

$$\text{equation}(1) \Rightarrow p(-2) = 41 - 72(-2) - 18(-2)^2$$
$$= 41 + 144 - 72$$
$$= 113$$

Solutions of long questions (5- Marks)

1 Ans : -

Let one number = x

other number = 24 - x

Function (फलन)

y = product of two numbers

(दो संख्याओं का गुणा)

$$y = x \cdot (24 - x) \quad .....(1)$$
$$\frac{dy}{dx} = 24 - 2x \quad .....(2)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2 \quad .....(3)$$

For critical point

$$\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow 24 - 2x = 0$$
$$\Rightarrow x = 12$$

$$\text{eqnuation}(3) \Rightarrow \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=12} = -2(-\text{ve})$$

$\therefore$ **y is maximum at x = 12**

clearly

one number = x = 12

other number = 24 - x = 24 - 12 = 12

$\therefore$ **The numbers = 12 and 12**

2 Ans ;

Let EBCD be a rectangle inscribed in a circle of radius r and centre o.

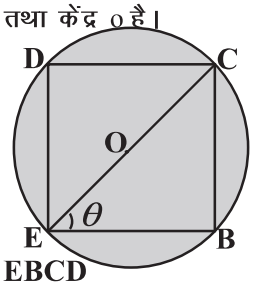
(माना EBCD वृत के अन्तर्गत एक आयत है और वृत की त्रिज्या r तथा केंद्र o है।

Let $\angle CEB = \theta$

Then

$EC = 2r$, $EB = 2r\cos\theta$

and $BC = 2r\sin\theta$



Let A = area of rectangle EBCD

आयत EBCD का क्षेत्रफल

$A = EB \times BC$

$A = 2r\cos\theta \times 2r\sin\theta$

$A = 4r^2\cos\theta \cdot \sin\theta$

$A = 2r^2\sin2\theta \quad .....(1) \ (\because r = \text{constant})$

$$\frac{dA}{d\theta} = 4r^2\cos2\theta \quad .....(2)$$
$$\frac{d^2A}{d\theta^2} = -8r^2\sin2\theta \quad .....(3)$$

For critical points $\Rightarrow \frac{dA}{d\theta} = 0$

$\Rightarrow 4r^2\cos2\theta = 0$

$\Rightarrow \cos2\theta = 0$

$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$$\text{equation}(3) \Rightarrow \left.\frac{d^2A}{d\theta^2}\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -8r^2(-\text{ve}) \qquad \text{[maximum]}$$

$$\therefore EB = 2r\cos\theta = 2r \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 2r \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,r$$

© JCERT not to be republished

$$BC = 2r\sin\theta = 2r \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 2r \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,r$$

$$\therefore \quad EB = BC$$

$\therefore$ EBCD is a square Proved

3 Ans : -

Given

$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$ .....(1)

d.w.r. to x

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 24x - 48$ .....(2)

$f''(x) = 36x^2 - 48x + 24$ .....(3)

For critical points –

$f'(x) = 0$

$\Rightarrow 12x^3 - 24x^2 + 24x - 48 = 0$

$\Rightarrow 12(x^3 - 2x^2 + 2x - 4) = 0$

$\Rightarrow 12[x^2(x-2) + 2(x-2)] = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 2)(x - 2) = 0$

$x^2 + 2 = 0$

$x^2 = -2$

$x = \sqrt{-2} \notin [0, 3]$

or

$x - 2 = 0 \in [0, 3]$

$x = 2$

$\therefore x = 2$

equation(3) $\Rightarrow f''(2) = 36(2)^2 - 48(2) + 24$

$= 144 - 96 + 24$

$= 72$ (+ve)

So , x = 2 is a point of local minima

Now equation(1) $\Rightarrow f(2) = -39$

$f(0) = 25$

$f(3) = 16$

$\therefore$ Maximum value of $f(x) = 25$ at $x = 0 \in [0, 3]$

$\therefore$ Minimum value of $f(x) = -39$ at $x = 2 \in [0, 3]$

4 Ans ; -

Given

$$y = \frac{4\sin\theta}{2 + \cos\theta} - \theta \quad \text{.....(1)}$$

d.w.r. to θ

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{4\sin\theta}{2 + \cos\theta}\right] - \frac{d\theta}{d\theta}$$

$$= \frac{(2 + \cos\theta)\frac{d}{d\theta}(4\sin\theta) - 4\sin\theta\frac{d(2 + \cos\theta)}{d\theta}}{(2 + \cos\theta)^2} - 1$$

$$= \frac{(2 + \cos\theta) \cdot 4\cos\theta - 4\sin\theta \cdot (0 - \sin\theta)}{(2 + \cos\theta)^2} - 1$$

$$= \frac{8\cos\theta + 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}{(2 + \cos\theta)^2} - 1$$

$$= \frac{8\cos\theta + 4}{(2 + \cos\theta)^2} - 1$$

$$= \frac{8\cos\theta + 4 - 4 - \cos^2\theta - 4\cos\theta}{(2 + \cos\theta)^2}$$

$$= \frac{4\cos\theta - \cos^2\theta}{(2 + \cos\theta)^2}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{\cos\theta \cdot (4 - \cos\theta)}{(2 + \cos\theta)^2}$$

In $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\theta > 0 \Rightarrow -\cos\theta < 0 \Rightarrow 4 - \cos\theta > 0$

$\therefore \cos\theta(4 - \cos\theta) \geq 0$ and $(2 + \cos\theta)^2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta(4 - \cos\theta)}{(2 + \cos\theta)^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} \geq 0$$

So , y is increasing on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

5 Ans : -

Given

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ .....(1)}$$

d.w.r. to x

$$\frac{2x}{9} + \frac{2y}{16} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{16}\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{16x}{9y} \text{ .....(2)}$$

(a) tangent is parallel to x - axis

स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{16x}{9y} = 0$$

$\therefore x = 0$

equation(1) $\Rightarrow 0 + \frac{y^2}{16} = 1$

$y^2 = 16$

$y = \pm 4$

$\therefore$ points (बिन्दुएँ) $= (x, y) = (0, \pm 4)$

(b) tangent is parallel to y - axis

स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर है

$$\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow -\frac{9y}{16x} = 0$$

$\therefore y = 0$

© JCERT not to be republished

equation(1) $\Rightarrow \frac{x^2}{9} + 0 = 1 \Rightarrow x^2 = 9$

$\Rightarrow x = \pm 3$

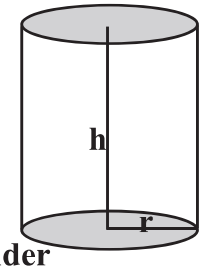
points (बिन्दुएँ) $= (x, y) = (\pm 3, 0)$

6 Ans ; -

Let

r = radius of cylinder
बेलन की त्रिज्या

h = height of cylinder
बेलन की ऊँचाई



s = surface area of cylinder
बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

v = volume of cylinder बेलन का आयतन

we know

$s = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$2\pi rh = s - 2\pi r^2 \quad \therefore h = \frac{s - 2\pi r^2}{2\pi r}$ .....(1)

and(और)

$v = \pi r^2 h$

$v = \pi r^2 \left(\frac{s - 2\pi r^2}{2\pi r}\right)$ {By (1)}

$v = \frac{sr}{2} - \pi r^3$ .....(2)

d.w.r. to r

$\frac{dv}{dr} = \frac{s}{2} - 3\pi r^2$ .....(3)

$\frac{d^2v}{dr^2} = -6\pi r$ .....(4)

For critical point –

$\frac{dv}{dr} = 0$

$\Rightarrow \frac{s}{2} - 3\pi r^2 = 0$

$\Rightarrow r^2 = \frac{s}{6\pi}$

$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{s}{6\pi}}$

from equtions(4)

$\left.\frac{d^2v}{dr^2}\right]_{r=\sqrt{\frac{s}{6\pi}}} = -6\pi\sqrt{\frac{s}{6\pi}}$ (-ve)

∴ volume will be maximum

Now $r^2 = \frac{s}{6\pi}$

$s = 6\pi r^2$

from equaion(1)

$\Rightarrow h = \frac{6\pi r^2 - 2\pi r^2}{2\pi r}$

$\Rightarrow h = \frac{4\pi r^2}{2\pi r}$

$\Rightarrow h = 2r$

clearly height of cylinder is equal to diameter.
स्पष्ट है, बेलन की ऊँचाई व्यास के बराबर है।

7 Ans : -

$f(x) = \sin x + \cos x \quad , x \in [0, \pi]$ .....(1)

d.w.r. to x

$f'(x) = \cos x - \sin x$

For critical point –

$f'(x) = 0$

$\cos x - \sin x = 0$

$\tan x = 1 \quad \therefore x = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$

Now equation(1) ⇒

at $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

at $x = 0 \Rightarrow f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$

at $x = \pi \Rightarrow f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = 0 - 1 = -1$

$\therefore$ **absolute maximum value** $= \sqrt{2}$ **at** $x = \frac{\pi}{4}$

निरपेक्ष महत्तम मान $= \sqrt{2}$; $x = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ **absolute minimum value** $= -1$ **at** $x = \pi$

निरपेक्ष निम्नत्तम मान $= -1$; $x = \pi$

© JCERT not to be republished